

CHỦ ĐỀ: NGUYÊN HÀM- TÍCH PHÂN
PHÂN DẠNG ĐỀ MINH HỌA – ĐỀ CHÍNH THỨC
KÌ THI THPTQG 2017 + 2018 + 2019

KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Định lí:

1) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C , hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

2) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

Do đó $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Ký hiệu $\int f(x)dx = F(x) + C$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1: $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Tính chất 2: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.

Tính chất 3: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí: Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	Nguyên hàm của hàm số hợp ($u = u(x)$)
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

Hệ quả: Nếu $u = ax + b (a \neq 0)$ thì ta có $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Hay

$$\int u dv = uv - \int v du$$

II. TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$).

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c) \quad 4. \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

BÀI TẬP

NGUYÊN HÀM

Câu 1: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- A. $x^2 + 6x + C$. B. $2x^2 + C$. C. $2x^2 + 6x + C$. D. $x^2 + C$.

Câu 2: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- A. $2x^2 + C$. B. $x^2 + 3x + C$. C. $2x^2 + 3x + C$. D. $x^2 + C$.

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C$. B. $x^2 + 4x + C$. C. $x^2 + C$. D. $2x^2 + C$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2 \sin 2x + C$.

D. $\int f(x)dx = -2 \sin 2x + C$.

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$?

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

Câu 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$.

A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$.

B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.

C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$.

D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$.

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C$.

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$.

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$.

B. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$.

C. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$.

D. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$. B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$. D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$.

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$.

C. $6x + C$.

D. $x^3 + x + C$.

Câu 12: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $x^4 + x^2 + C$.

B. $3x^2 + 1 + C$.

C. $x^3 + x + C$.

D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 13: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $x^4 + x + C$.

B. $4x^3 + 1 + C$.

C. $x^5 + x^2 + C$.

D. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$. B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^5 + x^3 + C$. D. $x^4 + x^2 + C$.

Câu 15: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

A. $3x^2 + 2x + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^4 + x^3 + C$. D. $x^3 + x^2 + C$.

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $e^x + 1 + C$.

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. B. $2x^2 \ln x + x^2$. C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 18: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là:

A. $x^2 + 5x + C$. B. $2x^2 + 5x + C$. C. $2x^2 + C$. D. $x^2 + C$.

Câu 19: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$. B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$. C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$. D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 20: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$. B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$. D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Câu 21: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$.

A. $I = e$. B. $I = \frac{1}{e}$. C. $I = \frac{1}{2}$. D. $I = 1$.

Câu 22: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3) = \ln 2 - 1$. B. $F(3) = \ln 2 + 1$. C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$. B. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.
C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$. D. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá

trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 15$. B. $2 + \ln 15$. C. $3 + \ln 15$. D. $\ln 15$.

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$. B. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$.
C. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$. D. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C$.

Câu 26: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là:

A. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

B. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

C. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C.$

D. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$

Câu 27: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

B. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C.$

C. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C.$

D. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

Câu 28: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$

B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$

C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$

D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Câu 29: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$

D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

Câu 30: Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C.$

B. $\int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C.$

C. $\int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C.$

D. $\int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C.$

Câu 31: Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C.$

B. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C.$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

D. $\int f'(x)\ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}.$

B. $-\frac{2}{3}.$

C. $-\frac{19}{36}.$

D. $-\frac{2}{15}.$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

Câu 44: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^2 \sqrt{u}du.$ B. $I = \int_1^2 \sqrt{u}du.$ C. $I = \int_0^3 \sqrt{u}du.$ D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u}du.$

Câu 45: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 2.$ B. $S = -2.$ C. $S = 0.$ D. $S = 1.$

Câu 46: Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6.$ B. $I = 36.$ C. $I = 2.$ D. $I = 4.$

Câu 47: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=2.$ B. $a-2b=0.$ C. $a+b=-2.$ D. $a+2b=0.$

Câu 48: Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4.$ B. $I = -\pi^4.$ C. $I = 0.$ D. $I = -\frac{1}{4}.$

Câu 49: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x)dx$.

A. $I = 32.$ B. $I = 8.$ C. $I = 16.$ D. $I = 4.$

Câu 50: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6.$ B. $S = 2.$ C. $S = -2.$ D. $S = 0.$

Câu 51: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}.$ B. $\log \frac{5}{3}.$ C. $\ln \frac{5}{3}.$ D. $\frac{2}{15}.$

Câu 52: $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 - e).$ B. $e^4 - e.$ C. $\frac{1}{3}(e^4 + e).$ D. $e^3 - e.$

Câu 53: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2 \ln 2.$ B. $\frac{1}{3} \ln 2.$ C. $\ln 2.$ D. $\frac{2}{3} \ln 2.$

Câu 54: $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2 \ln \frac{5}{7}.$ B. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}.$ C. $\frac{1}{2} \ln 35.$ D. $\ln \frac{7}{5}.$

Câu 55: Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây

đúng?

- A. $a-b=-c$. B. $a+b=c$. C. $a+b=3c$. D. $a-b=-3c$.

Câu 56: Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây

đúng?

- A. $a+b=-2c$. B. $a+b=c$. C. $a-b=-c$. D. $a-b=-2c$.

Câu 57: Cho $\int_1^e (1+x\ln x)dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a-b=-c$. B. $a+b=c$. C. $a+b=-c$. D. $a-b=c$.

Câu 58: Cho $\int_1^e (2+x\ln x)dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b=-c$. B. $a-b=-c$. C. $a-b=c$. D. $a+b=c$.

Câu 59: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. -3 . B. 12 . C. -8 . D. 1 .

Câu 60: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- A. -2 . B. -1 . C. 2 . D. 1 .

HƯỚNG DẪN GIẢI NGUYÊN HÀM- TÍCH PHÂN

Câu 1: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

- A. x^2+6x+C . B. $2x^2+C$. C. $2x^2+6x+C$. D. x^2+C .

Lời giải

Chọn A. $f(x)=2x+6$ có họ tất cả các nguyên hàm là $F(x)=x^2+6x+C$.

Câu 2: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

- A. $2x^2+C$. B. x^2+3x+C . C. $2x^2+3x+C$. D. x^2+C .

Lời giải

Chọn B. Ta có: $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C$.

Câu 3: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

- A. $2x^2+4x+C$. B. x^2+4x+C . C. x^2+C . D. $2x^2+C$.

Lời giải

Chọn B. Ta có $\int(2x+4)dx=x^2+4x+C$.

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 2x$.

- A. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. B. $\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.
C. $\int f(x)dx=2\sin 2x+C$. D. $\int f(x)dx=-2\sin 2x+C$.

Lời giải

Cách 1: .

Ta có: $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Câu 5: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$?

- A. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$. B. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$.
C. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$. D. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$.

- A. $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C$. B. $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$.
C. $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$. D. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ với $a \neq 0$; thay $a=3$ và $b=0$ để có kết quả.

Phân tích phương án nhiều:

Phương án A. do nhầm dấu và nhầm sang tính đạo hàm.

Phương án C. học sinh nhầm sang nguyên hàm của $\sin x$: $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$.

Phương án D. học sinh nhầm hệ số $3x$.

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$

A. $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$.

B. $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln(5x-2) + C$.

C. $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C$.

D. $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ ($a \neq 0$) ta được $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C$.

Phân tích phương án nhiễu:

Phương án B. sai do áp dụng nhầm $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$ nhầm a với b

Phương án C. nhầm hệ số.

Phương án D. sai do nhầm coi $a=1$.

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

A. $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$.

B. $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$.

C. $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$.

D. $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$.

Lời giải

$$\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + c.$$

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường sai phương án A. sai do áp dụng công thức đạo hàm.

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$. B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$. D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$.

Lời giải

Sử dụng công thức nguyên hàm: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$; thay $a=7$.

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường sai chọn phương án A. do nhầm đạo hàm.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \sqrt{2x-1} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} + C$.

Lời giải

Cách 1: $\int f(x) dx = \int \sqrt{2x-1} dx = \int (2x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} + C$

Cách 2: Sử dụng MTCT, ta biết rằng $\int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm đáp án A. do thiếu $\frac{1}{a}$ trong công thức

$$\int (ax-1)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} (ax-1)^{n+1} + C.$$

Câu 11: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- A. $x^3 + C$. B. $\frac{x^3}{3} + x + C$. C. $6x + C$. D. $x^3 + x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (3x^2 + 1) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C.$$

Câu 12: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A. $x^4 + x^2 + C$. B. $3x^2 + 1 + C$. C. $x^3 + x + C$. D. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 13: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

- A. $x^4 + x + C$. B. $4x^3 + 1 + C$. C. $x^5 + x^2 + C$. D. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (x^4 + x) dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- A. $4x^3 + 2x + C$. B. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^5 + x^3 + C$. D. $x^4 + x^2 + C$.

Lời giải

Theo công thức nguyên hàm cơ bản.

Câu 15: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- A. $3x^2 + 2x + C$. B. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. C. $x^4 + x^3 + C$. D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } F(x) = \int (x^3 + x^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $e^x + 1 + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int (e^x + x) dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 17: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là

- A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. B. $2x^2 \ln x + x^2$. C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải

Cách 1. Ta có $\int f(x)dx = \int 4x(1+\ln x)dx = \int 4xdx + \int 4x \ln x dx$

+ Tính $\int 4xdx = 2x^2 + C_1$

+ Tính $\int 4x \ln x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = 4xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = 2x^2 \end{cases}$$

Suy ra $\int 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x - \int 2xdx = 2x^2 \ln x - x^2 + C_2$

Do đó $I = 2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Cách 2. Ta có $(2x^2 \ln x + x^2)' = (2x^2)' \cdot \ln x + 2x^2 \cdot (\ln x)' + (x^2)'$

$$= 4x \cdot \ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x$$

$$= 4x(1 + \ln x).$$

Do đó $2x^2 \ln x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$.

Hay $2x^2 \ln x + x^2 + C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$.

Câu 18: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là:

A. $x^2 + 5x + C$.

B. $2x^2 + 5x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $x^2 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (2x+5)dx = x^2 + 5x + C$.

Câu 19: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

B. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

D. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

$F(x) = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C$.

$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Vậy $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm đáp án C, do $e^0 = 1$.

Câu 20: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$.

B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.

C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$.

D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Lời giải

$F(x) = \int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + C$; Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Rightarrow C = 1$.

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm đáp án A do

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 2 \Rightarrow -1 + 0 + C = 2 \Rightarrow C = 3.$$

Học sinh thường nhầm đáp án B, C do nhầm công thức nguyên hàm $\sin x$ và $\cos x$.

Câu 21: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$.

- A. $I = e$. B. $I = \frac{1}{e}$. **C. $I = \frac{1}{2}$.** D. $I = 1$.

Lời giải

$$\text{PP 1: Tính } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Câu 22: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ và $F(2) = 1$. Tính $F(3)$.

- A. $F(3) = \ln 2 - 1$. **B. $F(3) = \ln 2 + 1$.** C. $F(3) = \frac{1}{2}$. D. $F(3) = \frac{7}{4}$.

Lời giải

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C. \quad F(2) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Vậy $F(x) = \ln|x-1| + 1$. Suy ra $F(3) = \ln 2 + 1$.

Phân tích phương án nhiễu:

- Áp dụng sai công thức nguyên hàm dẫn đến Hoặc D.
- Tính nhầm $C = -1$ dẫn đến

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5\sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. **$f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.** B. $f(x) = 3x + 5\cos x + 2$.
C. $f(x) = 3x - 5\cos x + 2$. D. $f(x) = 3x - 5\cos x + 15$.

Lời giải

Ta có $f(x) = 3x + 5\cos x + C$ mà $f(0) = 10$ nên $f(0) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot \cos 0 + C = 10 \Leftrightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5\cos x + 5$.

Phân tích phương án nhiễu:

- Nhầm nguyên hàm $\sin x = \cos x$ dẫn đến hoặc D.
- Tính sai C dẫn đến

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $4 + \ln 15$. B. $2 + \ln 15$. **C. $3 + \ln 15$.** D. $\ln 15$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

+ Xét trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Ta có $f(0) = 1$, suy ra $C = 1$.

Do đó, $f(x) = \ln|2x-1|+1$, với mọi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1) = 1 + \ln 3$.

+ Xét trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Ta có $f(1) = 2$, suy ra $C = 2$.

Do đó, $f(x) = \ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Suy ra $f(3) = 2 + \ln 5$.

Vậy $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 3 + \ln 5 = 3 + \ln 15$.

Câu 25: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$.

B. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + C$.

C. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C$.

D. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + C$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $t = x - 1$

$$\int f(x)dx = \int \frac{3(t+1)-1}{t^2} dt = \int \frac{3t+2}{t^2} dt = \int \frac{3}{t} dt + \int \frac{2}{t^2} dt = 3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$$

Câu 26: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là:

A. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C$.

B. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$.

C. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C$.

D. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int \frac{2x+1}{(x+2)^2} dx &= \int \frac{2(x+2)-3}{(x+2)^2} dx = \int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2} dx = 2 \int \frac{d(x+2)}{x+2} - \int 3(x+2)^{-2} d(x+2) \\ &= 2\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C = 2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C. \end{aligned}$$

Câu 27: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C$.

B. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$.

C. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$.

D. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} dx = \int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right] dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 28: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$.

B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C$.

$$C. 2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$$

$$D. 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 29: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

$$A. \int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

$$B. \int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$$

$$C. \int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

$$D. \int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$$

Lời giải

Vì $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$ nên theo định nghĩa nguyên hàm ta

$$\text{có } \left(\frac{1}{2x^2}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Xét } f'(x)\ln x = \frac{2}{x^3}\ln x; I = \int \frac{2}{x^3}\ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{-1}{2x^2} \end{cases}; I = uv - \int v du = 2 \cdot \frac{-\ln x}{2x^2} + 2 \cdot \int \frac{1}{2x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C.$$

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm đáp án D do nhầm dấu khi tính nguyên hàm.

Câu 30: Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

$$A. \int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C.$$

$$B. \int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C.$$

$$C. \int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C.$$

$$D. \int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x).e^{2x} dx = (x-1)e^x + C \Rightarrow f(x).e^{2x} = e^x + (x-1).e^x = x.e^x$$

$$\Rightarrow f(x) = x.e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x).e^{-x}$$

$$\text{Suy ra } \int f'(x)e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx = \int (1-x)d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = e^x(2-x) + C.$$

Phân tích phương án nhiễu:

- Tính sai nguyên hàm $\int f'(x)e^{2x} dx$ dẫn đến hoặc B. hoặc D.

Câu 31: Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

$$A. \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C.$$

$$B. \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C.$$

$$C. \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

$$D. \int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } F'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4} = \frac{f'(x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3}.$$

$$\text{Xét } I = \int f'(x) \ln x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \ln x \cdot f(x) - \int \frac{f(x)}{x} dx + C = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C.$$

Phân tích phương án nhiễu:

- Tính sai nguyên hàm dẫn đến chọn sai đáp án.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

$$A. -\frac{35}{36}.$$

$$B. -\frac{2}{3}.$$

$$C. -\frac{19}{36}.$$

$$D. -\frac{2}{15}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x[f(x)]^2 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 2x \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -2x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + C.$$

$$\text{Từ } f(2) = -\frac{2}{9} \text{ suy ra } C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } f(1) = \frac{1}{-1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

$$A. -\frac{11}{6}.$$

$$B. -\frac{2}{3}.$$

$$C. -\frac{2}{9}.$$

$$D. -\frac{7}{6}.$$

Lời giải

Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = x[f(x)]^2$, suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$. Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$, ta có $f(x) \leq f(2) < 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

$$\text{Chia 2 vế hệ thức cho } [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2].$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

Do $f(2) = -\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1) = -\frac{2}{3}$.

Chú ý: có thể tự kiểm tra các phép biến đổi tích phân trên đây là có nghĩa.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{1}{10}$.

B. $-\frac{41}{400}$.

C. $-\frac{1}{40}$.

D. $-\frac{391}{400}$.

Lời giải

$$f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 4x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 4x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = x^4 \Big|_1^2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = 15 \Leftrightarrow 25 + \frac{1}{f(1)} = 15 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$.

B. $-\frac{79}{20}$.

C. $-\frac{4}{5}$.

D. $-\frac{71}{20}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 [f(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{1}{5} \text{ nên } C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{-4}{x^4 + 4}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Câu 36: $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$.

B. $\frac{1}{3}e^5 - e^2$.

C. $e^5 - e^2$.

D. $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^2 e^{3x-1} dx = \frac{1}{3} e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2).$$

Câu 37: Biết $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$ khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

A. -7 .

B. 7 .

C. -1 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 3 - 4 = -1$.

Câu 38: Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- A. 4. D. -8. C. 8. D. -4.

Lời giải

Chọn D.

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = 2 - 6 = -4.$$

Câu 39: Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- A. 6. B. -6. C. -2. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = 2 + (-4) = -2$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính $I = \int_1^2 f'(x) dx$

- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 3$. D. $I = \frac{7}{2}$.

Lời giải

$$I = \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$$

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm phương án B, C do nhầm cận.

Câu 41: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$.

Phân tích phương án nhiễu:

Học sinh thường nhầm đáp án A vì:

$$I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = \frac{3}{2} + 2.2 - 3 = \frac{5}{2}.$$

Câu 42: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

- A. $I = 7$. B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. C. $I = 3$. D. $I = 5 + \pi$.

Lời giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7.$$

Phân tích phương án nhiễu:

$$\text{Học sinh thường nhầm đáp án C.} = 5 - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

Câu 43: Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$:

A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. **C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$.** D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Lời giải

Cách 1: $I = \int_1^e x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Câu 44: Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^2 \sqrt{u} du$. B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$. **C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.** D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$.

Lời giải

PP 1:

$$\text{Đặt } u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x = 1 \Rightarrow u = 0; \text{ khi } x = 2 \Rightarrow u = 3.$$

$$\text{Do đó: } I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx = \int_0^3 \sqrt{u} du.$$

Câu 45: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 2$. B. $S = -2$. **C. $S = 0$.** D. $S = 1$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^e \frac{e^x dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_1^e \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = (\ln|t| - \ln|t+1|) \Big|_1^e = (1 - \ln(1+e)) - (-\ln 2)$$

$$= 1 + \ln \frac{2}{1+e} = 1 - \ln \frac{1+e}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a^3 + b^3 = 0.$$

Cách 2. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \int_0^1 \frac{(e^x+1)-e^x}{e^x+1} dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} dx = x \Big|_0^1 - \ln|e^x+1| \Big|_0^1 = 1 - \ln \frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Phân tích phương án nhiều:

- Khi tính sai tích phân hs sẽ không chọn được kết quả đúng.

Câu 46: Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 36$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Đặt $t = 3x$; $dt = 3dx$. Ta có $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2 \Rightarrow t=6$.

$$I = \frac{1}{3} \int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

Câu 47: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=2$.

B. $a-2b=0$.

C. $a+b=-2$.

D. $a+2b=0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^1 = (\ln 2 - \ln 3) - (\ln 1 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3$$

suy ra $a=2, b=-1 \Rightarrow a+2b=0$.

Phân tích phương án nhiều:

- Tính sai tích phân sẽ không ra đáp án đúng.

Câu 48: Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

B. $I = -\pi^4$.

C. $I = 0$.

D. $I = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^\pi \cos^3 x \cdot \sin x dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$

$$\text{Đổi cận: với } x=0 \Rightarrow t=1; \text{ với } x=\pi \Rightarrow t=-1. \text{ Vậy } I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

Câu 49: Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(2x)dx$.

A. $I = 32$.

B. $I = 8$.

C. $I = 16$.

D. $I = 4$.

Lời giải

$I = \int_0^2 f(2x)dx$. Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2 \Rightarrow t=4$.

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)dx = 8.$$

Phân tích phương án nhiễu:

- Đổi biến nhưng hs chuyển đổi nhầm $I = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^4 f(x) dx = 16$ dẫn đến Hoặc

$$I = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = 4 \text{ dẫn đến}$$

- Tính sai dẫn đến kết quả A.

Câu 50: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Cách 1:

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}. \text{ Ta có: } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Khi đó:

$$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [\ln x - \ln(x+1)]_3^4 = (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra: $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = 2$.

Cách 2: Casio

$$\text{Ta có: } I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5 \Rightarrow e^I = e^{a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5} = e^{\ln(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c)} \Rightarrow e^I = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$$

$$\text{Hay } \frac{16}{15} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \Leftrightarrow 2^4 = 2^a \cdot 3^{b+1} \cdot 5^{c+1} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b + 1 = 0 \\ c + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 2.$$

Câu 51: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$.

B. $\log \frac{5}{3}$.

C. $\ln \frac{5}{3}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| \Big|_0^2 = \ln|2+3| - \ln|0+3| = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 52: $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$.

B. $e^4 - e$.

C. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$.

D. $e^3 - e$.

Lời giải

$$\int_0^1 e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e).$$

Câu 53: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- A. $2\ln 2$. B. $\frac{1}{3}\ln 2$. C. $\ln 2$. D. $\frac{2}{3}\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \left(\frac{1}{3} \ln|3x-2| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 54: $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

- A. $2\ln \frac{5}{7}$. B. $\frac{1}{2}\ln \frac{7}{5}$. C. $\frac{1}{2}\ln 35$. D. $\ln \frac{7}{5}$.

Lời giải

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln(2x+3) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}.$$

Câu 55: Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 11$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a-b=-c$. B. $a+b=c$. C. $a+b=3c$. D. $a-b=-3c$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+9} \Rightarrow t^2 = x+9 \Rightarrow 2tdt = dx$. Đổi cận: khi $x=16 \Rightarrow t=5$; $x=55 \Rightarrow t=8$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} &= \int_5^8 \frac{2tdt}{(t^2-9)t} = 2 \int_5^8 \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{3} \left(\int_5^8 \frac{dt}{t-3} - \int_5^8 \frac{dt}{t+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\ln|x-3| - \ln|x+3|) \Big|_5^8 = \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 11. \end{aligned}$$

Vậy $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Câu 56: Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a+b=-2c$. B. $a+b=c$. C. $a-b=-c$. D. $a-b=-2c$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+4} \Rightarrow 2tdt = dx$. Với $x=5 \Rightarrow t=3$; $x=21 \Rightarrow t=5$

$$\text{Ta có } \int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = 2 \int_3^5 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{2} (\ln|t-2| - \ln|t+2|) \Big|_3^5 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 7.$$

Câu 57: Cho $\int_1^e (1+x\ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a-b=-c$. B. $a+b=c$. C. $a+b=-c$. D. $a-b=c$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^e (1+x\ln x) dx = \int_1^e dx + \int_1^e x \ln x dx = e - 1 + \frac{1}{2} \int_1^e \ln x d(x^2)$$

$$= e-1 + \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 d(\ln x) \right] = e-1 + \frac{1}{2} \left[e^2 - \int_1^e x dx \right] = e-1 + \frac{1}{2} \left[e^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^e \right] = e-1 + \frac{1}{2} \left[e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{4}e^2 + e - \frac{3}{4} \quad \text{Suy ra } a = \frac{1}{4}; b = 1; c = -\frac{3}{4} \Rightarrow a - b = c.$$

Câu 58: Cho $\int_1^e (2+x \ln x) dx = a.e^2 + b.e + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b=-c$. B. $a-b=-c$. **C. $a-b=c$.** D. $a+b=c$.

Lời giải

$$\int_1^e (2+x \ln x) dx = 2x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx = 2e - 2 + \int_1^e x \ln x dx.$$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \int_1^e (2+x \ln x) dx = \frac{e^2}{4} + 2e - \frac{7}{4}$$

Vậy $a-b=c$.

Câu 59: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. -3. B. 12. **C. -8.** D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 g(x) dx = 5 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 g(x) dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^1 2g(x) dx = 10$$

$$\text{Xét } \int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2g(x) dx = 2 - 10 = -8.$$

Câu 60: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- A. -2. **B. -1.** C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = \int_0^1 \frac{(x+2) - 2}{(x+2)^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \int_0^1 \frac{2dx}{(x+2)^2}$$

$$= \ln(x+2) \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{(x+2)^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3.$$

Vậy $a = -\frac{1}{3}; b = -1; c = 1 \Rightarrow 3a + b + c = -1$.